27/04/17.

Σύνοψη θεωρίας κυκλικών ομάδων.

• Υποομάδες κυκλικών ομάδων, είναι κυκλικές.

(I) Έστω $G=\langle \alpha \rangle$: κυκλική ομάδα άπειρης τάξης.

(1) Οι μόνοι γεννήτορες της G είναι οι: α, α^{-1}.

(2) Οι υποομάδες της G είναι οι: $\{e\}=\langle e \rangle$, $G=\langle \alpha \rangle$, $\langle \alpha^2 \rangle$, $\langle \alpha^3 \rangle$, ...

(3) $\forall m, n \in \mathbb{N}$: $\langle \alpha^n \rangle \subseteq \langle \alpha^m \rangle \Leftrightarrow m \mid n$.

(4) Το μόνο στοιχ. της G με πεπ/νη τάξη είναι το e.

(5) Η απεικόνιση $f: \mathbb{Z} \to G$, $f(n)=\alpha^n$ είναι ισομ. ομάδων.

(6) Δύο άπειρες κυκλικές ομάδες είναι ισόμορφες.

(II) Έστω $G=\langle \alpha \rangle$: πεπ/νη κυκλική ομάδα με $|G|=n$.
Τότε $G=\{e, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$.

(1) Σύνολο γεννητόρων της $G=\{\alpha^k \in G \mid (k,n)=1\}$ και άρα πλήθος γεννητόρων της είναι $=\varphi(n)$, όπου φ: συνάρτηση του Euler.

(2) Για κάθε θετικό διαιρέτη d του n, υπάρχει μοναδική ~~υποο~~ υποομάδα της G, η : $\langle \alpha^{n/d} \rangle$. Επιπλέον όλες οι υποομάδες της G είναι: $\langle \alpha^{n/d_1} \rangle, \dots, \langle \alpha^{n/d_{\tau(n)}} \rangle$ όπου $\tau(n)$ = πλήθος θετικών διαιρετών του n και $d_1, \dots, d_{\tau(n)}$: θετικοί διαιρέτες του n.

(3) $\langle \alpha^{n/d_i} \rangle \subseteq \langle \alpha^{n/d_j} \rangle \Leftrightarrow d_i \mid d_j \Leftrightarrow \frac{n}{d_j} \mid \frac{n}{d_i}$

(4) Όλα τα στοιχεία της G έχουν πεπ/νη τάξη (κάποιον θετικό διαιρέτη της $|G|$).

(5) Η απεικόνιση $f: \mathbb{Z}_n \to G$, με $f([k]_n)=\alpha^k$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

(6) Δύο πεπ/νες κυκλικές ομάδες τάξης n είναι πάντα ισόμορφες.

• Δύο κυκλ. ομάδες είναι ισόμορφες $\Leftrightarrow$ έχουν την ίδια τάξη.

Scanned by CamScanner

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ HASSE ΤΩΝ ΥΠΟΟΜΑΔΩΝ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ

Το διάγραμμα Hasse των υποομάδων μιας πεπερασμένης ομάδας G αποτελείται από κορυφές και ακμές:

- Οι κορυφές αντιστοιχούν στις υποομάδες της G.
- Αν έχουμε δύο κορυφές που αντιστοιχούν σε δύο υποομάδες H και K της G, τότε θα χαράσσουμε μια ακμή ανάμεσα στις κορυφές $\Leftrightarrow$: (α) $H \leq K$ και (β) $\nexists\, L \leq G : H \subset L \subset K$, ως εξής $H \bullet \!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\! \bullet K$
- Τέλος, τοποθετούμε τις κορυφές οι οποίες αντιστοιχούν σε υποομάδες μικρότερης τάξης στο κάτω μέρος του διαγράμματος.

Π.χ. ① G: ομάδα τάξης 1: $G=\{e\}$

Διάγραμμα Hasse: $\bullet\, G=\{e\}$.

② G: ομάδα τάξης 2: $G=\{e,\alpha\}$.

Διαγ. Hasse:

G
|
$\{e\}$.

③ G: ομάδα τάξης 3: $G=\{e,\alpha,b\}=\langle\alpha\rangle=\langle b\rangle$, $o(\alpha)=o(b)=3$.

Διαγ. Hasse:

G
|
$\{e\}$.

④ G: ομάδα τάξης 4: και άρα είτε G: ομάδα του Klein είτε G: κυκλική τάξης 4.

(α) G: κυκλική τάξης 4: $G=\langle\alpha\rangle=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3\}$.

Άρα θα έχω 3 υποομάδες (όσοι οι διαιρέτες του 4) και θα είναι: $\{e\}$, $\langle\alpha^2\rangle=\{e,\alpha^2\}$, G

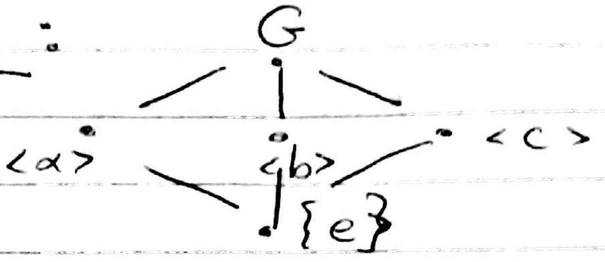
Διαγρ. Hasse:

G
|
$\langle\alpha^2\rangle$
|
$\{e\}$

(β) G: ομάδα του Klein: $G=\{e,\alpha,b,\overbrace{\alpha\cdot b}^{c}\}$ όπου $e=\alpha^2=b^2=c^2$ και $c=\alpha\cdot b$. Οι υποομάδες της G είναι:

$\{e\}, G, \langle \alpha \rangle = \{e, a\}, \langle b \rangle = \{e, b\}, \langle c \rangle = \{e, c\}$.

Διαγρ. Hasse :



(5) G : κυκλική ομάδα τάξης 6.

Τότε : $G = \langle \alpha \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^5\}$

Διαιρέτες του 6 : 1, 2, 3, 6.

$\langle \alpha^{\frac{6}{1}} \rangle = \langle \alpha^6 \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$

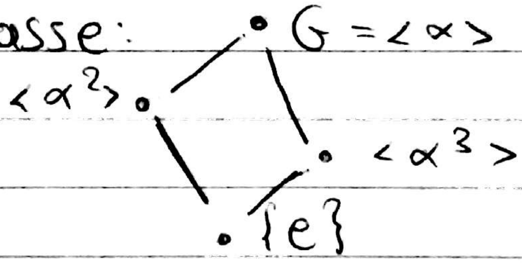
$\langle a^{6/2} \rangle = \langle \alpha^3 \rangle = \{e, a^3\}$.

$o(\alpha)$

$\langle \alpha^{6/3} \rangle = \langle \alpha^2 \rangle = \{e, a^2, a^4\}$

$\langle a^{6/6} \rangle = \langle \alpha \rangle = G$.

Διαγρ. Hasse:



(6) $G = \langle \alpha \rangle$: κυκλική ομάδα τάξης 18.

Διαιρέτες του 18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18. → Θα έχω 6 διακεκριμένες υποομάδες.

$\langle \alpha^{18/1} \rangle = \langle \alpha^{18} \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$

$\langle \alpha^{18/2} \rangle = \langle \alpha^9 \rangle \overset{\text{τάξη } 2}{=} \{e, a^9\}$

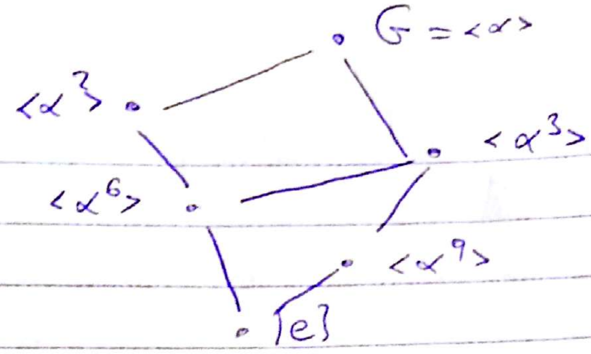
$\langle \alpha^{18/3} \rangle = \langle \alpha^6 \rangle = \{e, a^6, a^{12}\}$

$\langle \alpha^{18/6} \rangle = \langle \alpha^3 \rangle = \{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}\}$

$\langle \alpha^{18/9} \rangle = \langle \alpha^2 \rangle = \{e, a^2, a^4, a^6, \dots, a^{16}\}$.

$\langle \alpha^{18/18} \rangle = \langle \alpha \rangle = G$.

Διάγραμμα Hasse:



• Αν G κυκλική με τάξη έναν πρώτο αριθμό τότε έχει μόνο 2 υποομάδες: $\{e\}$, G.

Θεώρημα Lagrange

Έστω $(G,\cdot)$ ομάδα και $H\leq G$. Ορίζουμε στο G την σχέση $\sim_H : \sim_{RH}$: $\forall x,y\in G: x\sim_H y \Leftrightarrow x^{-1}\cdot y\in H$.

Λήμμα: Η σχέση $\sim_H$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου G.

Απόδειξη: • (Ανακλαστική): $\forall x\in H$ αρκεί νδο $x\sim_H x$. Συμβαίνει, διότι $x\cdot x^{-1}=e\in H$, αφού $H\leq G$.

• (Συμμετρική): $x\sim_H y \Rightarrow x^{-1}\cdot y\in H$. Όμως $H\leq G \Rightarrow (x^{-1}\cdot y)^{-1}\in H \Rightarrow y^{-1}\cdot(x^{-1})^{-1} = y^{-1}\cdot x\in H \Rightarrow$
$\Rightarrow y\sim_H x$

• (Μεταβατική): $x\sim_H y \Rightarrow x^{-1}\cdot y\in H$, $y\sim_H z \Rightarrow y^{-1}\cdot z\in H$ $\overset{H\leq G}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow (x^{-1}\cdot y)\cdot(y^{-1}\cdot z) = x^{-1}\cdot(y^{-1}\cdot y)\cdot z = (x\cdot z)\in H \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\sim_H z \Rightarrow \boxed{\sim_H : \text{σχ. ισοδ.}}$$

$$\forall x\in G: [x]_H = \{y\in G \mid y\sim_H x\} = \{y\in G \mid x\sim_H y\} =$$
$$= \{y\in G \mid (x^{-1}\cdot y)\in H\} = \{y\in G \mid x^{-1}\cdot y = h,\ h\in H\} =$$
$$= \{y\in G \mid x\cdot x^{-1}\cdot y = x\cdot h,\ h\in H\} = \{y\in G \mid x\cdot h, \text{ όπου } h\in H\} =$$
$$= \{x\cdot h \mid h\in H\} := x\cdot H \text{ (αριστερή πλευρική κλάση)}$$

Άρα $\forall x\in G: [x]_H = xH$